Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 07.07.2014.

Linearna algebra, pismeni ispit

1. (25%)(a) Objasniti koje osobine skup $\mathcal{V}$ mora zadovoljavati da bi bio vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Da li $\mathcal{V}$ može biti konačan skup? Odgovor obrazložiti.

(75%)(b) Neka je

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\, x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\, x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

Dokazati da je $\mathcal{L}$ potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, odrediti mu bazu, dimenziju i neki direktni kompliment.

2. Zadan je operator $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ sa

$$T(a + bt + ct^2) = a + b + c + (a + 3b)t + (a - b + 2c)t^2$$

Odrediti sve jednodimenzionalne potprostore koji su invarijantni u odnosu na operator T.

3. U prostoru svih realnih nizova $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...) \mid a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$) zadan je skup

$$\mathcal{L} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_{n+2} - 2a_n = 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

Dokazati da je preslikavanje $T : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ koje nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pridružuje niz $(a_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ (tj. niz sa općim članom a_{n+2}) linearni operator. Odrediti matricu operatora T (matricu koordinata) u bazi $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, ...), (0, 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, ...)\}$.

4. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim proizvodom ortonormirati skup

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Važno: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Neka je

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -x_1+x_2+x_3+x_4=0,\ x_1-x_2+x_3+x_4=0,\ x_1+x_2-x_3+x_4=0,\ x_1+x_2+x_3-x_4=0 \right\}$$

Dokazati da je $\mathcal{L}$ potprostor od $\mathbb{R}^n$, odrediti mu bazu, dimenziju i neki direktni komplement.

Rj: Da bi $\mathcal{L}$ bio vektorski potprostor od $\mathbb{R}^4$ potrebno je i dovoljno da je $\mathcal{L}$ neprazan i da vrijede osobine (A1) i (M1)

(A1) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$

(M1) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Pa izaberimo dva proizvoljna vektora iz $\mathcal{L}$ npr. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$

Za ova dva vektora znamo da vrijedi

$$\begin{aligned} -a_1+a_2+a_3+a_4&=0 \\ a_1-a_2+a_3+a_4&=0 \\ a_1+a_2-a_3+a_4&=0 \\ a_1+a_2+a_3-a_4&=0 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} -b_1+b_2+b_3+b_4&=0 \\ b_1-b_2+b_3+b_4&=0 \\ b_1+b_2-b_3+b_4&=0 \\ b_1+b_2+b_2-b_4&=0 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+(a_4+b_4)&=0 \\ (a_1+b_1)-(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+(a_4+b_4)&=0 \\ (a_1+b_1)+(a_2+b_2)-(a_3+b_3)+(a_4+b_4)&=0 \\ (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)-(a_4+b_4)&=0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$$

Slično se pokaže da je $\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L}$ jest vektorski potprostor

Primjetimo da prostor $\mathcal{L}$ možemo napisati u sljedećem obliku

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \ker(A)$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{L}$ je vektorski prostor koji se sastoji samo od nula vektora. Dimenzija od $\mathcal{L}$ je nula i $\mathcal{L}$ nema baze.

Prisjetimo se definicije komplementarnog podprostora

Za potprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni potprostori akko $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ i $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$, i u tom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ što zapisujemo sa $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

Direktni komplement od $\mathcal{L}$ je

$$\mathcal{M} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(#) Zadan je linearni operator $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ sa

$$T(a+bt+ct^2) = a+b+c+(a+3b)t+(a-b+2c)t^2$$

Odrediti sve jednodimenzionalne potprostore koji su invarijantni u odnosu na operator T.

Rj.

Invarijantni potprostori

Neka je T linearni operator na V. Za potprostor $X \subseteq V$ kažemo da je invarijantan potprostor u odnosu na T akko $T(X) \subseteq X$.

Označimo sa M jednodimenzionalni potprostor prostora $\mathcal{P}_2$ koji je invarijantan u odnosu T. Neka je

$$M = \text{span}\{p(t)\}.$$

Kako je M invarijantan u odnosu na T to znači da je

$$T(M) \subseteq M.$$

Drugim riječima za $\forall g \in M$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.d. $T(g) = \alpha p$.
Ali kako je $g \in M$ to se g može prikazati kao linearna kombinacija polinoma iz $\{p\}$.
Prema tome da bi odredili sve jednodimenzionalne potprostore koji su invarijantni u odnosu na T dovoljno je posmatrati samo bazu $\{p\}$.

Radi jednostavnijeg zapisa umjesto transformacije T posmatramo transformaciju $T': \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definisanu sa

$$T'\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+3b \\ a-b+2c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Neka je $\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right\}$ baza za M. Tada $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.d.

$$T'\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} &Aa = \lambda a \\ &Aa - \lambda a = 0 \\ &(A - \lambda I)a = 0 \\ &a \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda(\lambda-3)^2$$

$$-\lambda(\lambda-3)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3$$

$\lambda_1 = 0$:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{uz. proizv.}]{\text{1 promj.}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}s \\ \frac{1}{2}s \\ s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

$\lambda_2 = 3$:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{uzim. proizv.}]{\text{1 promj.}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Jednodimenzionalni potprostori koji su invarijantni u odnosu na operator T su

$$M_1 = \operatorname{span}\left\{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t + t^2\right\} \quad ; \quad M_2 = \operatorname{span}\left\{-t + t^2\right\}.$$

(#) U prostoru svih realnih nizova $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\})$ zadan je skup

$$\mathcal{L} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_{n+2} - 2a_n = 0, \ n \in \mathbb{N}\}$$

Dokazati da je preslikavanje $T: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ koje nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pridružuje niz $(a_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ (tj. niz sa općim članom a_{n+2}) linearni operator. Odredite matricu operatora $T: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (matricu koordinata) u bazi $\mathcal{B} = \{(1,0,2,0,4,0,8,\dots), (0,1,0,2,0,4,0,8,\dots)\}$.

Rj. Da bi pokazali da je T linearni operator potrebno je i dovoljno pokazati da $\forall (a_n), (b_n) \in \mathcal{L}$ i $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$T((a_n)+(b_n)) = T(a_n) + T(b_n) \quad i \quad T(\alpha(a_n)) = \alpha T(a_n).$$

$$T((a_n)+(b_n)) = T((a_n+b_n)) = (a_{n+2}+b_{n+2}) = (a_{n+2}) + (b_{n+2}) = T(a_n) + T(b_n)$$

$$T(\alpha(a_n)) = T((\alpha a_n)) = (\alpha a_{n+2}) = \alpha(a_{n+2}) = \alpha T(a_n)$$

$\Rightarrow$ T jest linearni operator.

Ostalo je još da odredimo $[T]_{\mathcal{B}}$. Prema definiciji

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T((1,0,2,0,4,0,8,0,\dots))]_{\mathcal{B}} & [T((0,1,0,2,0,4,0,8,\dots))]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix}$$

Primjetimo da niz $(1,0,2,0,4,0,8,0,\dots)$ možemo kraće zapisati sa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gdje je $a_n = \begin{cases} 2^k, & 2k+1 = n \\ 0, & 2k = n \end{cases}$.

$$T((1,0,2,0,4,0,8,0,\ldots)) = (2,0,4,0,8,0,10,0,\ldots)$$

(prvom članu pridružuje treći, drugom četvrti, trećem peti, ...)

$$T((0,1,0,2,0,4,0,8,\ldots)) = (0,2,0,4,0,8,0,10,\ldots)$$

Dva niza iz baze $\mathcal{B}$ označimo sa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Primijetimo da vrijedi

$$T((1,0,2,0,4,0,\ldots)) = 2\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$T((0,\tfrac{1}{2},0,1,0,2,0,4,\ldots)) = 2\,(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Prema tome

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(#) U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim proizvodom ortonormirati skup

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \ldots$$

Rj: Date vektore označimo redom sa u_1, u_2, u_3 i u_4. Koristićemo sljedeću proceduru: Prvo ćemo dobiti ortogonalne vektore $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ na sljedeći način

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{<v_1, u_2>}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{<v_1, u_3>}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{<v_2, u_3>}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$v_4 = u_4 - \frac{<v_1, u_4>}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{<v_2, u_4>}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{<v_3, u_4>}{\|v_3\|^2} v_3$$

Poslije toga nije teško ortonormirati dobijene vektore. Pa krenimo redom

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad <v_1, u_2> = 6, \quad \|v_1\|^2 = 6$$

$$v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} <v_1, u_3> = 0 \\ <v_2, u_3> = 0 \\ \|v_2\|^2 = 2 \end{array}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \langle v_1, u_4 \rangle = 1 \qquad \langle v_3, u_4 \rangle = 1$$

$$\langle v_2, u_4 \rangle = -1 \qquad \|v_1\|^2 = 6, \quad \|v_2\|^2 = 2$$

$$\|v_3\|^2 = 4$$

$$V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Time smo dobili ortogonalan skup

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1/12 \\ -1/12 \\ -1/4 \\ 1/12 \end{pmatrix} \right\}$$

Ortonormirana baza za $\mathbb{R}^4$ je

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1/12 \\ -1/12 \\ -1/4 \\ 1/12 \end{pmatrix} \right\}.$$